ANLAMLI RAKAMLAR

Bazı fiziksel büyüklükler ölçüldüğünde, ölçülen değerler, sadece deneysel belirsizliklerin sınırları içinde bilinir. Belirsizliğin değeri ölçümde kullanılan aletlerin kalitesi, deneycinin yeteneği ve yapılan ölçümlerin sayısı gibi değişik etmenlere bağlı olabilir.

Kurallar

1) 1, 2, 3, … ,9 a kadar olan rakamlar anlamlıdır.
2) Ondalık ayıraçtan sonra sayının sonundaki sıfırlar anlamlıdır.
3) İki anlamlı rakam arasında kalan sıfırlar da anlamlıdır.

Ölçülen Değer	Anlamlı rakam sayısı		Ölçülen Değer	Anlamlı rakam sayısı		Ölçülen Değer	Anlamlı rakam sayısı
6.751 g	4		0,0230 cc	3		0.001008	4
0.157 ml	3		404	3		0.00010700	5
28.0 ml	3		70080	4		0.05070080	7
2500 m	2		8000	1		$2.53X10^{4}$	3
0.070 g	2		800	1		$3.06X10^{-5}$	3
30.07 kg	4		800.	3		$1.000X10^{8}$	4
0.106 cm	3		50060.	5		$4.20X10^{-7}$	3
0.0067 g	2		50060.00	7			

Sayıları Yuvarlama

Ölçülen Değer	ARS	Yuvarlama	Ölçülen Değer	ARS	Yuvarlama	Ölçülen Değer	ARS	Yuvarlama
4257.16	1	4000	158.1054	1	200	0.035047	1	0.04
4257.16	2	4300	158.1054	2	160	0.035047	2	0.035
4257.16	3	4260	158.1054	3	158	0.035047	3	0.0350
4257.16	4	4257	158.1054	4	158.1	0.035047	4	0.03505
4257.16	5	4257,2	158.1054	5	158.11	0.035047	5	0.035047
4257.16	6	4257,16	158.1054	6	158.105	0.035047	6	0.0350470

Sayı	ARS	Yuvarlama	Sayı	ARS	Yuvarlama
50000	1	$5x10^4$	36500000	1	40000000
50000	2	$5.0x10^4$	36500000	2	37000000
50000	3	$5.00x10^4$	36500000	3	36500000
50000	4	$5.000x10^4$	36500000	4	$3.650x10^7$
50000	5	$5.0000x10^4$	36500000	5	$3.6500x10^7$

Toplama Kuralı

Sayılar toplanırken sonuçtaki ondalık basamak sayısı, toplamdaki herhangi bir terimin en az ondalık basamak sayısına eşittir. Bu kural çıkarma için de geçerlidir.

123+5.35=128,35 ≅ 128

1.0001+0.0003 = 1.0004

1.002-0.998 = 0.004

2.314+5.23=7.544 ≅ 7.54

3.45+5.3=8.75 ≅ 8.8

3.65+14.1+8.136=25.886 ≅ 25.9

530. +4.63=534.63 ≅ 535.

36500+143.56=36643.56 ≅ 36600

350000+57000.1+42.68=407042.78 ≅ 410000

72000+4300+160000 = 240000

(4.671) – (2.1) =2.571 ≅ 2.6

(7.463) – (3.58) =3.883 ≅ 3.88

(200) – (28.14) =171.86 ≅ $2x10^2$

(5000) – (62.413) = 4937.587 ≅ 5000 = $5x10^3$

Çarpma Kuralı

İki sayı çarpıldığında sonuçtaki anlamlı rakam sayısı, çarpımdaki en az anlamlı rakam sayısına eşittir. Bu kural bölme içinde geçerlidir.

(9.6) x (7) = 67.2 ≅ 70 = $7x10^1$

(2) (1) (1) (1)

(4.38) x (2.3) = 10.074 ≅ 10. = $1.0x10^1$

(3) (2) (2) (2)

(8.315) x (17,368)	= 144.41492	≅	144.4
(4) (5)			(4)
(34.7) ÷ (3.1)	= 11.193548	≅	11
(3) (2)			(2)
(536.3172) ÷ (13.2)	= 40.63009091	≅	40.6
(7) (3)			(3)
(325) ÷ (75)	= 4.33333333	≅	4.3
(3) (2)			(2)
(4000) ÷ (8.17)	= 489.596083231334	≅	500
(1) (3)			(1)

$(4.231x10^{-5}+7.6x10^{-6}+2.731x10^{-4}) = (0.4231x10^{-4}+0.076x0^{-4}+2.731x10^{-4})$

$= (3.2301x10^{-4}) = (3.230x10^{-4})$

Karışık İşlemler

$(4.3) \times (5.23) + 6.814 = 2\underline{2}.489 + 6.814 = 2\underline{9}.303 \cong 29$

(2) (3) (2)

$(7.35) \times (4.265) + 7.34 = 31.\underline{3}4775 + 7.34 = 38.68775 \cong 38.7$

(3) (4) (3)

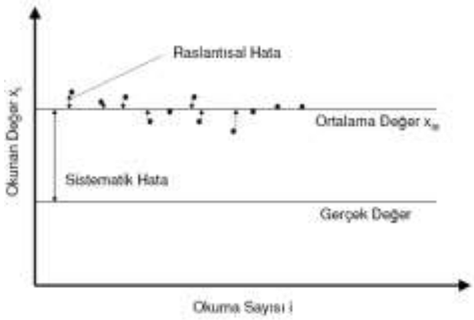
$$\frac{8.46-5.312}{2.8} = \frac{3.1\underline{4}8}{2.8} = 1.\underline{1}24285714 \cong 1.1$$

(14 insan) x (25.9 mil) = 362.6 ≅ 363 sayılabilir olan niceliklerde anlam aranmaz.

(Sayılabilir)

(34)	x	(3 elma)	= 102
(Sayılabilir)		(Sayılabilir)	

Deneysel Bulguların Analizi (Hata Analizi)



Hata Analizinde Akılcı Yaklaşım

Bu hata analiz yönteminde, ölçme sisteminde bulunan bütün ölçüm cihazlarının aynı anda (*pozitif veya negatif yönde*) maksimum hatayı yaptığı kabul edilir. Örnek olarak; bir elektrik devresindeki güç, gerilim ve akım şiddeti çarpımı olan; $P = E.I$ bağıntısı yardımıyla hesaplanmak istensin. Elektrik gerilimi ve akım şiddetini ölçen cihazların sabit hata miktarları (*belirsizlikleri*) sırasıyla, $\pm w_E$ ve $\pm w_I$ seklinde verilmiş olsun.

$$E = e \pm w_E \qquad I = i \pm w_I$$

Bu durumda; ölçme esnasında elektrik gerilimi *e* olarak ve elektrik akımı da *i* olarak okunmuş ise, *E* ve *I* için şu ifadeler yazılabilir. Böyle bir deney sonucundan hareketle akılcı yaklaşıma göre elde edilebilecek en hatalı iki değer aşağıdaki gibi olur.

$$P_{maks} = (e + w_E).(i + w_I) \qquad P_{min} = (e - w_E).(i - w_I)$$

Örnek: Bir elektrik devresindeki gücün tespiti için, bu devredeki gerilim ve akım ölçülmek isteniyor. Söz konusu devredeki gerilim ve akım değerleri sırasıyla 100. ± 2 V, ve 10.0 ± 0.2 A şekilde verildiğine göre, gücün nominal değerini bularak, akılcı yaklaşımın kullanılması durumunda devredeki gücün maksimum ve minimum değerlerini tespit ediniz. Ayrıca akılcı yaklaşıma göre yapılan hata miktarını yüzdesel olarak bulunuz.

Çözüm: Akılcı yaklaşıma göre nominal değer veren hatalı iki değer,

$$P_N = (100.).(10.0) = 10\underline{0}0 = 1.00x10^3W$$

$$P_{maks} = (100.+2).(10.0+0.2) = (10\underline{2}.) + (10.\underline{2}) = 10\underline{4}0.4 \cong 1.04x10^3W$$

$$P_{min} = (100.-2).(10.0-0.2) = (9\underline{8}.) + (9.\underline{8}) = 9\underline{6}0.4 \cong 9.6x10^2W$$

$$\%w_{Pmaks} = \frac{P_{maks} - P_N}{P_N}.(100) = \frac{10\underline{4}0.4 - 10\underline{0}0}{10\underline{0}0}.100 = \frac{\underline{4}0.4}{10\underline{0}0}100 \cong \% + 4$$

$$\%w_{Pmin} = \frac{P_{min.} - P_N}{P_N}.(100) = \frac{9\underline{6}0.4 - 10\underline{0}0}{10\underline{0}0}.100 = \frac{\underline{3}9.6}{10\underline{0}0}100 \cong \% - 4$$

Hata Analizinde Belirsizlik Analizi Yöntemi

Herhangi bir deney sistemi aracılığı ile tespit edilmesi veya hesaplanması gereken büyüklük *R,* bu büyüklüğe etki eden *n* adet bağımsız değişkenler ise $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ olsun. Bu durumda R

$$R = R\,(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

Şeklinde yazılabilir. Deneylerde etkili olan her bir bağımsız değişkene ait sabit hata miktarı (belirsizlikler) $\pm w_{x_1}, \pm w_{x_2}, \pm w_{x_3}, \ldots, \pm w_{x_n}$, olsun. R büyüklüğünün sabit hata miktarı (belirsizliği) $\pm w_R$ *ise*

$$w_R = \frac{\partial R}{\partial x_1}.w_{x_1} + \frac{\partial R}{\partial x_2}.w_{x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3}.w_{x_3} + \cdots + \frac{\partial R}{\partial x_n}.w_{x_n}$$

Şeklinde olur. Bu durumda R büyüklüğüne ilişkin maksimum belirsizlik, aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$w_{Rmaks} = \left|\frac{\partial R}{\partial x_1}.w_{x_1}\right| + \left|\frac{\partial R}{\partial x_2}.w_{x_2}\right| + \left|\frac{\partial R}{\partial x_3}.w_{x_3}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial R}{\partial x_n}.w_{x_n}\right|$$

Bu durum mümkün olabilecek en kötü durum olup, olasılığı en küçüktür. Bu durumu iyileştirmek için, Pisagor Teoremine göre belirsizlik aşağıdaki gibi yazılır.

$$w_R = \pm\left[\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}.w_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2}.w_{x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_3}.w_{x_3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial R}{\partial x_n}.w_{x_n}\right)^2\right]^{1/2}$$

Yukarıdaki bağıntı dikkatle incelendiğinde belirsizlik analizi yönteminin diğer yöntemlere göre en önemli üstünlüklerinden birinin, deneylerde en büyük hataya neden olan değişkenin hemen tespit edilebilmesinin olduğu görülecektir. Böylece hatayı azaltmak için söz konusu bu değişkenin ölçümünde kullanılan cihaz üzerinde yoğunlaşılabilir. Ayrıca yukarı bağıntıda yer alan terimlerin eş boyutluluk ilkesi açısından uyumlu olduğuna dikkat edilmelidir.

Örnek: Bakır bir çubuğun direnci, $R = R_0[1+\alpha(T\text{-}20)]$ şeklinde belirlenmektedir. Burada R_0, 20.°C dirençtir ve değeri 6.00 ± %0.3 Ω'dur. α = 0.00400 ± %1 °C^{-1} direncin sıcaklık katsayısıdır. Telin sıcaklığı ise T = 30. ± 1 °C olarak verilmektedir. Bakır telin direncini verilen sıcaklıktaki değerini ve değerdeki belirsizliği hesaplayınız.

Çözüm:

Telin nominal direnci,

$R = R_0[1+\alpha(T\text{-}20)]$

$$R = 6.00[1 + (0.00400)(30. - 20.)]$$

$$R = 6.00 + (6.00).(0.00400)(10.) = 6.00 + (0.2\underline{4}) = 6.24\ \Omega$$

$$R = 6.24\ \Omega$$

Belirsizlik için;

$$\frac{\partial R}{\partial R_0} = 1 + \alpha(T - 20) = 1 + (0.00400)(30. - 20.) = 1 + 0.04\underline{0} = 1.040$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = R_0(T - 20) = (6.00)(30. - 20.) = 60.$$

$$\frac{\partial R}{\partial T} = R_0(\alpha) = (6.00)(0.00400) = 0.0240$$

$$w_{R_0} = (6.00)(0.3/100) = 0.0\underline{1}8\ \Omega; \quad w_\alpha = (0.00400)(1/100) = 4x10^{-5}\ °C^{-1}; \quad w_T = 1\ °C$$

$$w_R = \pm\left[\left(\frac{\partial R}{\partial R_0}.w_{R_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \alpha}.w_\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial T}.w_{\mathrm{T}}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$w_R = \pm\left[\left((1.040).(0.0\underline{1}8)\right)^2 + \left((60.).(4x10^{-5})\right)^2 + \left((0.0240).(1)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$w_R = 0.0\underline{3}044\ \Omega \qquad \rightarrow \quad w_R \cong 0.03\ \Omega$$

$$w_R = \frac{0.0\underline{3}044}{6.24}x100 = \%0.\underline{4}878 \cong \%0.5 \quad \rightarrow \quad w_R \cong \%0.5$$

R değeri

$R \cong 6.24 \pm 0.03\ \Omega$ veya $R \cong 6.24 \pm \%\ 0.5\ \Omega$

Örnek: Bir otomobilin belirli bir süre aralığındaki ortalama hızının ($v=x/t$) hesaplanması istenmektedir.

a) x = 10.0 km ve t = 500. s olarak verildiğine göre, bu otomobilin ortalama hızının nominal değerini m/s cinsinden hesaplayınız.

b) x = 10.0 ± %5 km ve t = 500. ± 5 s olarak verildiğine göre, akılcı yaklaşımı kullanarak ortalama hızın hesaplanmasındaki yüzdesel hatayı hesaplayınız.

c) Yukarıdaki veriler geçerli olmak üzere belirsizlik analizinin kullanılması durumunda, ortalama hızın hesaplanmasındaki yüzdesel hatayı hesaplayınız.

Çözüm:

a) Nominal değer

$$v_n = \frac{x}{t} = \frac{10\underline{0}00}{500.} = 20.0\, m/s$$

b) Akılcı yaklaşıma göre

$$w_x = \pm(10\underline{0}00).\left(\frac{5}{100}\right) = \pm 500$$

$$w_x = \pm 500$$

$$w_t = \pm 5 \text{ s}$$

$$v_{maks} = \frac{x+w_x}{t-w_t} = \frac{10\underline{0}00+500}{500.-5} = \frac{10\underline{5}00}{495} = 21.\underline{2}12121 \cong 21.2$$

$$\%hata(maks) = \frac{v_{maks}-v_n}{v_n}.100 = \frac{21.\underline{2}12121-20.0}{20.0}.100 = \frac{1.\underline{2}12121}{20.0}.100 \cong +\%6.1$$

$$v_{min} = \frac{x-w_x}{t+w_t} = \frac{10\underline{0}00-500.}{500.+5} = \frac{9\underline{5}00}{505} = 1\underline{8}.811881 \cong 19$$

$$\%hata(min) = \frac{v_{min}-v_n}{v_n}.100 = \frac{1\underline{8}.811881-20.0}{20.0}.100 = \frac{-\underline{1}.18811881}{20.0}.100 \cong -\%6$$

c) Belirsizlik analizine göre hızdaki belirsizlik,

$$w_v = \pm\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}.w_x\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}.w_t\right)^2\right]^{1/2}, \qquad v_n = \frac{x}{t} \text{ olmak üzere}$$

$$w_v = \pm\left[\left(\frac{1}{t}.w_x\right)^2 + \left(-\frac{1}{t^2}.w_t\right)^2\right]^{1/2} = \pm\left[\left(\frac{1}{500.}.(500)\right)^2 + \left(-\frac{10.0x10^3}{500.^2}.(5)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$w_v = \pm\left[\left(\frac{1}{500.}.(500)\right)^2 + \left(-\frac{10.0x10^3}{500.^2}.(5)\right)^2\right]^{1/2} = \pm[1+0.2]^{1/2} = \pm\underline{1}.095445 \cong \pm 1 \text{ m/s}$$

$$\%w_v = \frac{w_v}{v_n}x100 = \pm\frac{\underline{1}.095445}{20.0}x100 = \pm\%\underline{5}.477225 \cong \pm\%5$$

$v \cong 20.0 \pm 1$ m/s veya $v \cong 20.0 \pm \%5$ m/s

Deneysel Bulguların İstatistik Analizi

Bu kısımda özellikle deneysel bulguların analizi için kullanılan bazı tanımlar ile temel istatistik bilgiler verilecektir.

Bir ölçme aleti ile yapılan aynı bir fiziksel büyüklüğün ölçümleri aynı şahıs veya değişik şahıslar tarafından tekrarlandığında, bulunan değerler arasında farlılıklar görülür.

Örnek olarak, küre şeklindeki çelik bir bilyenin çapının, bir mikrometre ile yapılan birkaç ölçümü farklı değerler verebilir. Deneyi yapan veya deneyin sonuçları ile ilgilenen kimse için çoğunlukla bu değerlerin ortalaması önemlidir.

Aritmetik Ortalama

Aynı bir fiziksel büyüklük için yapılan n adet ölçümün her biri x_i ise x_m şeklinde tanımlanan "**aritmetik ortalama**" aşağıdaki gibi verilir.

$$x_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Sapma

Her bir ölçüm değerinin ortalama değerden farkı ise, "*sapma*" (*deflection, deviation*) olarak tanımlanır ve $d_i = x_i - x_m$ şeklindedir. *yani;*

$d_1 = x_1 - x_m$; $d_2 = x_2 - x_m$; $d_3 = x_3 - x_m$; ... ; $d_n = x_n - x_m$

Dikkat edilirse, bütün sapmaların toplamı ve aritmetik ortalaması sıfır değerindedir.

$$d_{i,T} = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_m) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_m = x_T - nx_m = x_T - x_T = 0$$

Standart Sapma

Deneysel bulgular, aritmetik ortalama değerden olan sapmalarının dağılımını gösteren bir büyüklük, "***standart sapma***" veya "***sapmaların karelerinin karekökü***" olan σ aşağıdaki gibidir.

$$\sigma = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_m)^2)\right]^{1/2}$$

Varyans

Standart sapmanın karesi olan σ^2 ise değişiklik (varyans) olarak adlandırılır.

Örnek Standart Sapma

Deneysel araştırma yapan araştırmacılar her zaman yeteri kadar bulgu toplayamazlar. Deneysel bulguların uygun bir değerlendirmesinin yapılabilmesi için en az 20 adet ölçüm sonucunun olması gerekir. Bu durumdan daha az sayıdaki ölçme halinde ***örnek standart sapma*** aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\sigma_{ö} = \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_m)^2)\right]^{1/2}$$

Görüldüğü gibi bu ifadede n yerine n-1 böleni kullanılmaktadır. Örnek sayısının artması halinde yukarıdaki σ ve $\sigma_{ö}$ değerleri birbirine yaklaşmaktadır. Örnek sayısı sonsuza gitmesi halinde ise bu iki ifade aynı değeri vermektedir.

Örnek: Bir ocaktan çıkan kömür numunelerinde yapılan nem ölçülmesinde aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur. Bu değerlere göre aritmetik ortalamayı, sapmaların mutlak ortalamasını, standart sapmayı, varyansı (değişikliği) ve örnek standart sapmayı bulunuz.

Numune	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nem (%)	11.2	9.3	12.3	9.2	11.0	14.1	8.9	9.7	10.3	10.0

Çözüm: Aritmetik ortalama aşağıdaki gibidir.

$$x_m(\%) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$x_m(\%) = \frac{1}{10}(11.2 + 9.3 + 12.3 + 9.2 + 11.0 + 14.1 + 8.9 + 9.7 + 10.3 + 10.0) = 10.6$$

Numune	$d_i = (x_i - x_m)$	$\lvert d_i \rvert$	$(x_i - x_m)^2$
1	0.6	0.6	0.36
2	- 1.3	1.3	1.69
3	1.7	1.7	2.89
4	- 1.4	1.4	1.96
5	0.4	0.4	0.16
6	3.5	3.5	12.25
7	- 1.7	1.7	2.89
8	- 0.9	0.9	0.81
9	- 0.3	0.3	0.09
10	- 0.6	0.6	0.36
Toplam	0	$12.\underline{4}$	$2\underline{3}.46$

Sapmaların mutlak ortalaması,

$$\lvert \bar{d_i} \rvert = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert d_i \rvert = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - x_m \rvert = \frac{1}{10}12.\underline{4} = \%1.24$$

Standart sapma,

$$\sigma = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_m)^2)\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{10}(2\underline{3}.46)\right]^{1/2} = 1.\underline{5}3166576 \cong 1.5$$

Varyans (Değişiklik),

$$\sigma^2 = 2.\underline{3}46 \cong 2.3$$

Örnek standart sapma,

$$\sigma_{ö} = \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_m)^2)\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{9}(2\underline{3}.46)\right]^{1/2} = 1.\underline{6}14517472 \cong 1.6$$